

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρεις ώρες. Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα (2 μονάδες το καθένα). Καλή Επιτυχία.

Θέμα 1 : Αν $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, είναι ορθογώνια μεταξύ των με $\|x\|_2 = \|y\|_2 = \|z\|_2$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $q = 2x + 2y + z$ και $w = x - 2y + 2z$ είναι ορθογώνια μεταξύ των και ότι $\|q\|_2 = \|w\|_2$.

Θέμα 2 : Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ όπου $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση και να συγκριθούν μεταξύ των, οι μέθοδοι Jacobi, Gauss-Seidel, η βέλτιστη SOR καθώς και η μέθοδος παρεμβολής (extrapolated) της Gauss-Seidel.

Θέμα 3 : α) Να αποδείξετε ότι τα δυο διαδοχικά διανύσματα υπόλοιπο $r^{(k-1)}$ και $r^{(k)}$ της μεθόδου απότομης καθόδου, είναι ορθογώνια μεταξύ των.

β) Να λυθεί το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

με τη μέθοδο συζυγών κλίσεων με αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = 0$. (Να διατηρείτε κλάσματα κατά τους υπολογισμούς.)

Θέμα 4 : Να λυθεί το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, με

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix},$$

με την QR ανάλυση χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Gram-Schmidt ορθογωνοποίησης. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις με ριζικά και κλάσματα στους υπολογισμούς.)

Θέμα 5 : Δίνεται ο συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Χρησι-

μοποιώντας τον αλγόριθμο με τη $\|\cdot\|_\infty$ της μεθόδου των αντίστροφων δυνάμεων με αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = (1 \ 1 \ 1)^T$, να γίνουν δυο επαναλήψεις για την προσέγγιση της μικρότερης ιδιοτιμής και του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος. Η λύση των συστημάτων να γίνει με την LU παραγοντοποίηση. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις με κλάσματα στους υπολογισμούς.)